Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas
Análisis Funcional – Convocatoria Ordinaria – Febrero 2021

1. Sea X el espacio normado de las funciones reales continuas en $[0,1]$ que se anulan en cero con la norma del máximo

$$X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}, \quad \|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

En X se considera el funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (f \in X)$$

Calcula $\|\varphi\|$.

2. Sea $T : c_0 \to \ell_2$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Calcula su norma y prueba que T no la alcanza.

b) Prueba que $Y = T(c_0)$ es un subespacio denso en ℓ_2 y que T es una biyección lineal de c_0 sobre Y.

c) ¿Es continua la aplicación $T^{-1} : Y \to c_0$? ¿Es Y cerrado en ℓ_2?.

3. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es continua.

b) $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ son normas equivalentes.

c) $|||\,.\,|||$ es una norma completa en X.

4. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

a) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

b) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.

c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un operador lineal continuo de X en ℓ_∞.

d) Sean $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\,.\,\|) \to (X, |||\,.\,|||)$ no es continua.